

TD n° 1 – Géométrie hyperbolique élémentaire

Le demi-plan de Poincaré

Le demi-plan $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, appelé *demi-plan de Poincaré*, est une des représentations du plan hyperbolique. On se propose d'en étudier quelques propriétés. On pourra utiliser les coordonnées complexes ou réelles, $(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy)$. Pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, le plan tangent à \mathbb{H}^2 en z est $T_z\mathbb{H}^2 = \{z + u, u \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$. Introduisons quelques objets :

- la *métrique hyperbolique* $g = (g_z)_{z \in \mathbb{H}^2}$ est une famille de produits scalaires $g_z : T_z\mathbb{H}^2 \times T_z\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dépendant continûment de z , avec

$$g_z(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\text{Im}(z)^2} = \frac{\langle u, v \rangle}{y^2}, \quad \forall u, v \in T_z\mathbb{H}^2.$$

Note : le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur \mathbb{C} . De manière équivalente, la métrique est décrite par le *tenseur métrique*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dzd\bar{z}}{\text{Im}(z)^2}.$$

- La *longueur* d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt,$$

la dernière égalité étant due au fait que tout élément du demi-plan de Poincaré admet une partie imaginaire strictement positive.

- La *distance* sur \mathbb{H}^2 est définie par

$$d(z, w) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins différentiables $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tels que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$.

Exercice 1. *Le groupe des isométries* Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. La *transformation de Möbius* associée à (a, b, c, d) est la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}.$$

Elle se prolonge par continuité sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

1. Montrer que l'ensemble des transformations de Möbius associées à (a, b, c, d) avec $ad - bc \neq 0$ forme un groupe. Il s'agit du groupe des automorphismes de la sphère de Riemann, noté $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes entre $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ et le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$.
3. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes entre $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et le groupe

$$\{g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : g(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\}.$$

4. Montrer que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve la métrique sur \mathbb{H}^2 .

5. Montrer que toute transformation de Möbius admet au moins un point fixe. En déduire une classification des isométries de \mathbb{H}^2 .

Solution.

- Il suffit de vérifier que l'identité est une transformation de Möbius de déterminant non nul, et que le produit et l'inverse de deux transformations de Möbius de déterminant non nul est de déterminant non nul.
- Le morphisme $\rho : \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ défini par

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est clairement surjectif. Son noyau est $\mathbb{C}^* I_2$, donc

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* I_2 = \text{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

Il reste à montrer que $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. L'inclusion $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ passe au quotient par le noyau de ρ , qui est donc $\mathbb{C}^* I_2$ pour $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ et $\{\pm I_2\}$ pour $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $f = f_{a,b,c,d}$ une transformation de Möbius telle que $ad - bc \neq 0$. On peut vérifier que $f'_{a,b,c,d}$ définie par

$$f'_{a,b,c,d} = \frac{1}{ad - bc} f_{a,b,c,d}$$

est représentée par le même élément de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, et que son déterminant vaut 1. Ainsi, on a bien

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

- Montrons d'abord que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve \mathbb{H}^2 . Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, et $z \in \mathbb{H}^2$.

$$\text{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2i} \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0,$$

donc $g(z) \in \mathbb{H}^2$. Réciproquement, si $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ préserve \mathbb{H}^2 , montrons que $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Cela revient à montrer que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si g préserve \mathbb{H}^2 , il préserve aussi $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- Supposons d'abord $c, d \neq 0$ et $c \neq -d$. On peut renormaliser g de sorte que $d = 1$. Les points $g(0), g(1), g(\infty)$ sont trois éléments distincts dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$$g(0) = b, \quad g(\infty) = \frac{a}{c}, \quad g(1) = \frac{a + b}{c + 1},$$

et tous ces éléments sont dans \mathbb{R} . En particulier, $b \in \mathbb{R}$. En calculant $\text{Im}(g(1))$ on peut vérifier que $c \in \mathbb{R}$, et idem pour $\text{Im}(g(\infty))$ et a . Donc $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$. De plus $\text{Im}(g(z)) > 0$ pour tout z donc $ad - bc > 0$ donc on peut renormaliser g de sorte que $ad - bc = 1$, et $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

- Supposons ensuite $c, d \neq 0$ et $c = d$. Alors on peut normaliser g de sorte à avoir $c = -1, d = 1$. On a $g(0) = b \in \mathbb{R}, g(\infty) = -a \in \mathbb{R}$. De plus $\text{Im}(g(z)) > 0$ pour tout z donc $ad - bc > 0$ donc on peut renormaliser g de sorte que $ad - bc = 1$.
- Si $c = 0$, alors $d \neq 0$ et on peut normaliser de sorte à avoir $d = 1$. On a $g(0) = b \in \mathbb{R}, g(1) = a + b \in \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$, et on peut renormaliser pour avoir $ad - bc = 1$.
- Si $d = 0$ alors $c \neq 0$ et on peut supposer $c = 1$. On a $g(\infty) = a \in \mathbb{R}, g(1) = a + b \in \mathbb{R}$ donc $b \in \mathbb{R}$.

On conclut à l'égalité par double inclusion.

4. Montrons que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve la métrique. Tout d'abord, d'après les équations de Cauchy–Riemann, pour tout $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f^* \left(\frac{|dz|^2}{\text{Im}(z)^2} \right) = |f'(z)|^2 \frac{|dz|^2}{\text{Im}(f(z))^2}.$$

On applique cela à $f(z) = g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, et après un peu de calcul on obtient bien

$$\frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

5. L'espace $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est homéomorphe au disque fermé unité (on verra même dans l'exercice 3 qu'il existe un biholomorphisme entre les deux!) et $g : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ est continue donc d'après le théorème du point fixe de Brouwer, g admet au moins un point fixe. En tant que transformation de Möbius, g est uniquement déterminée par l'image de 3 points distincts. Si g a 3 points fixes, alors on peut vérifier que $g = I_2$. Donc si $g \neq I_2$, g a un ou deux points fixes.
- (a) Si g a deux points fixes, alors g est *hyperbolique*.
- (b) Si g a un point fixe dans \mathbb{H}^2 , alors g est *elliptique*.
- (c) Si g a un point fixe dans $\partial H^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, alors g est *parabolique*.

On peut par ailleurs classifier les isométries en calculant la trace des matrices associées : si $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on peut vérifier que g est hyperbolique (resp. elliptique, parabolique) si et seulement si $|\text{Tr}(g)| > 2$ (resp. $|\text{Tr}(g)| < 2$, $|\text{Tr}(g)| = 2$). Cela peut se voir en utilisant la décomposition d'Iwasawa (cf. feuille de TD 2).

Exercice 2. Géodésiques

- Montrer que les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à \mathbb{R} .
- En déduire que la distance sur \mathbb{H}^2 s'exprime sous la forme suivante :

$$d(z, w) = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{|z - w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2.$$

Solution.

- On fixe $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, et on veut déterminer la géodésique qui passe à travers ces deux points. On suppose d'abord que $z_1 = it_1$ et $z_2 = it_2$, avec $0 < t_1 < t_2$. Pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, on a

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dy}{y} = \log t_2 - \log t_1. \end{aligned}$$

Or, le membre de droite est justement la longueur du segment vertical qui relie z_1 et z_2 , donc cela montre bien que la géodésique qui passe par ces deux points est la droite verticale d'équation $x = 0$.

Les autres géodésiques sont les images de cette droite par les isométries de \mathbb{H}^2 , dont on peut démontrer qu'elles se décomposent en les translations $z \mapsto z + a$, les dilatations $z \mapsto az$, et les transformations de la forme

$$z \mapsto \frac{1}{z + a},$$

avec $a \in \mathbb{R}$, qui envoient une droite verticale sur un demi-cercle et réciproquement. Ainsi, les géodésiques sont bien les droites verticales et les cercles orthogonaux à \mathbb{R} .

- Il suffit de montrer l'égalité pour $z, w \in i\mathbb{R}_+^*$ car les deux termes de l'égalité sont invariants par $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et il existe toujours une isométrie qui envoie la géodésique entre deux points sur un segment de la demi-droite $i\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, si $z = it_1$ et $w = it_2$ avec $0 < t_1 < t_2$ on a vu que

$$d(it_1, it_2) = \log t_2 - \log t_1.$$

Ainsi,

$$\cosh(d(z, w)) = \frac{e^{\log t_2 - \log t_1} + e^{\log t_1 - \log t_2}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{t_2}{t_1} - \frac{t_1}{t_2} \right) = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2t_1t_2},$$

et le membre de droite correspond bien à la forme voulue.

Le disque de Poincaré

Exercice 3. *Du demi-plan au disque*

- Montrer que l'homographie

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

est un biholomorphisme entre \mathbb{H}^2 et \mathfrak{D} . Le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré sont alors *deux représentations du plan hyperbolique*.

- En déduire de la question 1 et des exercices précédents une description de la métrique, des isométries et des géodésiques de \mathfrak{D} .
- Montrer les identités suivantes dans \mathfrak{D} :

$$\cosh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \quad \sinh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Solution.

- On peut vérifier que la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

est une bijection d'inverse

$$f^{-1} : w \mapsto i \frac{1 + w}{1 - w}.$$

On peut par ailleurs vérifier aisément que

$$\frac{df}{d\bar{z}} = \frac{df^{-1}}{d\bar{z}} = 0,$$

ce qui fait que f est un biholomorphisme.

- Il suffit de calculer l'image par f des quantités désirées. La métrique devient

$$g_w(u, v) = \frac{4\langle u, v \rangle}{(1 - |w|^2)^2}.$$

Les isométries sont exactement les mêmes que pour \mathbb{H}^2 , et les géodésiques sont les images par f des géodésiques de \mathbb{H}^2 : les images des droites verticales sont des droites qui passent par l'origine du cercle, et les images des demi-cercles orthogonaux à $\partial\mathbb{H}^2$ sont toujours des demi-cercles orthogonaux à $\partial\mathfrak{D}$, à savoir S^1 .

3. La première égalité provient de la question 2 de l'exercice 2 et de l'utilisation de l'homographie de la question 1, la seconde provient de l'identité

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Trigonométrie

Exercice 4. Triangles hyperboliques Soit ABC un triangle géodésique dans le disque hyperbolique. On note $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $\alpha = |\widehat{BAC}|$, $\beta = |\widehat{ABC}|$ et $\gamma = |\widehat{BCA}|$ comme sur la figure 1 ci-dessous.

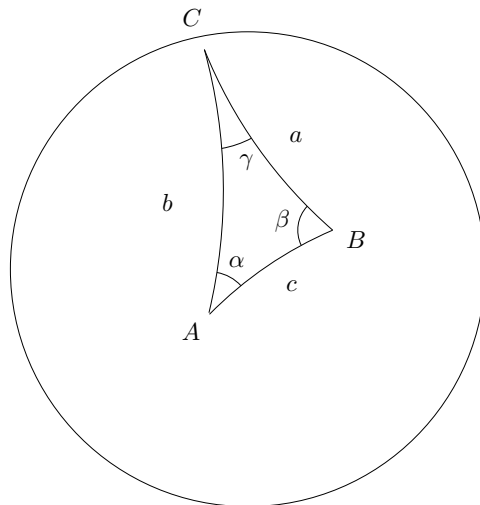


FIGURE 1 – Un triangle hyperbolique

1. Démontrer les formules suivantes.

- (a) La loi des cosinus hyperboliques

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

- (b) La loi des sinus hyperboliques

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

- (c) La formule

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(a) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}.$$

2. En déduire l'analogie du théorème de Pythagore pour un triangle rectangle hyperbolique.

Solution.

1. (a) Par isométrie on peut supposer que $C = 0$, de sorte que les côtés AC et BC soient des segments. On peut par ailleurs supposer que $\text{Im}(A) = 0$ et $\text{Re}(A) > 0$ (cf. figure 2).

On a d'un côté

$$\cosh(c) = \cosh(d(A, B)) = 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(A, B)\right) + 1.$$

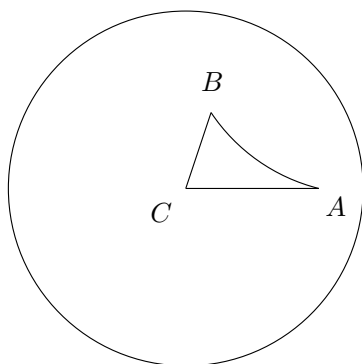


FIGURE 2 – Un triangle hyperbolique “pratique”.

Or, d’après la question 3 de l’exercice 3,

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(A, B)\right) = \frac{|A - B|^2}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)}, \quad \forall A, B \in \mathfrak{D}.$$

Ainsi,

$$\cosh(c) = \frac{2|A - B|^2}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)} + 1.$$

D’un autre côté,

$$\cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma) = I_1 - I_2,$$

où $I_1 = \cosh(a) \cosh(b)$ et $I_2 = \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$. En utilisant la question 3 de l’exercice 2, on obtient

$$I_1 = \frac{2(|A|^2 + |B|^2)}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)} + 1,$$

$$I_2 = 4 \frac{|A||B| \cos \gamma}{(1 - |A|^2)(1 - |B|^2)}.$$

On obtient bien la formule voulue, en utilisant le fait que¹

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \cos \gamma.$$

(b) On a

$$\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 = \frac{\sinh^2(c)}{1 - \left(\frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)}\right)}.$$

Par des manipulations algébriques on obtient

$$\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + 1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}.$$

Cette expression est symétrique en a, b, c donc par symétrie on a bien

$$\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 = \left(\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)}\right)^2.$$

1. C’est une conséquence du fait que les angles euclidiens et hyperboliques sont les mêmes.

(c) On pose $I = \cosh(a)$, $J = \cosh(b)$, $K = \cosh(c)$. On a

$$\cos(\gamma) = \frac{IJ - K}{\sqrt{(I^2 - 1)(J^2 - 1)}},$$

en utilisant les calculs de la question 2. De même,

$$\cos(\alpha) = \frac{JK - I}{\sqrt{(J^2 - 1)(K^2 - 1)}}, \quad \cos(\beta) = \frac{KI - J}{\sqrt{(K^2 - 1)(I^2 - 1)}}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma) &= \frac{(JK - I)(KI - J)}{\sqrt{(J^2 - 1)(K^2 - 1)(K^2 - 1)(I^2 - 1)}} - \frac{IJ - K}{\sqrt{(I^2 - 1)(J^2 - 1)}} \\ &= \frac{(JK - I)(KI - J) - (IJ - K)(K^2 - 1)}{\sqrt{(J^2 - 1)(I^2 - 1)(K^2 - 1)}} \end{aligned}$$

Également,

$$\sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) = (1 - \cos^2(\alpha))(1 - \cos^2(\beta)) = 1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta)$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{1 + 2IJK - (I^2 + J^2 + K^2)}{(J^2 - 1)(K^2 - 1)},$$

et on a une formule analogue pour $\sin^2(\beta)$. Notons que le numérateur est le même car il est symétrique en I, J, K . En combinant les formules il vient

$$\frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = K = \cosh(c),$$

comme espéré.

2. On applique le résultat de la question 1.(a) à $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Bonus : Inégalité de Cheeger pour les graphes aléatoires

Exercice 5. On se propose de démontrer l'inégalité de Cheeger énoncée dans le premier cours. Soit $G = (V, E)$ un graphe d -régulier tel que $V = \{1, \dots, N\}$. La *constante de Cheeger* $h = h(G)$ est définie par

$$h(G) = \min_{A \cup B = V} \frac{E(A, B)}{\min(|A|, |B|)},$$

où $E(A, B)$ est le nombre d'arêtes entre A et B . La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ définie par $a_{ij} = 1$ si i et j sont reliés par une arête et 0 sinon. Le *laplacien* du graphe est la matrice L correspondant à l'opérateur

$$Lf : x \mapsto \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y)) = (dI - A)f(x).$$

Note : on a $Lf = -\Delta f$ par rapport à la convention du cours! Le *trou spectral* de G est $\lambda_1 = d - \mu_2$, où μ_2 est la plus grande valeur propre non triviale de A . C'est donc la plus petite valeur propre non nulle de L . L'inégalité de Cheeger est la suivante :

$$\frac{h^2}{2} \leq d - \mu_2 \leq 2h.$$

1. Montrer la borne supérieure.
2. Soit π la mesure sur $(V, \mathcal{P}(V))$ définie par $\pi(S) = |S|$. Montrer que pour tout $\psi \in L^2(\pi)$ tel que $L\psi \leq \lambda\psi$ sur $S(\psi) = \{x \in S : \psi(x) > 0\}$, si l'on définit $\psi_+ = \max(\psi, 0)$ la partie positive de ψ ,

$$\lambda \|\psi_+\|_{L^2(\pi)}^2 \geq \mathcal{E}(\psi_+, \psi_+),$$

où \mathcal{E} est l'énergie de Dirichlet

$$\mathcal{E}(\psi, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{x \sim y} (\psi(x) - \psi(y))^2 = \langle \psi, L\psi \rangle_{L^2(\pi)}$$

3. Montrer que pour tout $\psi \in L^2(\psi)$ tel que $S(\psi) \neq \emptyset$,

$$\mathcal{E}(\psi_+, \psi_+) \geq \frac{h(\psi)^2 \|\psi_+\|_{L^2(\pi)}^2}{2},$$

où

$$h(\psi) = \inf \left\{ \frac{E(S, S^c)}{\pi(S)} : S \subset S(\psi), S \neq \emptyset \right\}.$$

4. En déduire la borne inférieure.

Solution.

1. Cf. cours : c'est une conséquence quasiment immédiate de la caractérisation variationnelle des valeurs propres

$$d - \mu_2 = \inf_{\substack{f: V \rightarrow \mathbb{C} \\ \sum_x f(x) = 0}} \left\{ \frac{\langle \psi, L\psi \rangle}{\|\psi\|^2} \right\},$$

et on prend, pour $A \sqcup B = V$, $f = \frac{1}{|A|} \mathbf{1}_A - \frac{1}{|B|} \mathbf{1}_B$.

2. Soit $\psi \in L^2(\pi)$ tel que $L\psi \leq \lambda\psi$ sur $S(\psi) = \{x \in S : \psi(x) > 0\}$. On définit par polarisation

$$\langle \psi_+, L\psi \rangle = \mathcal{E}(\psi_+, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{x \sim y} (\psi_+(y) - \psi_+(x))(\psi(y) - \psi(x)).$$

Par construction, on a $\mathcal{E}(\psi_+, \psi) \geq \mathcal{E}(\psi_+, \psi_+)$. De plus, par hypothèse sur ψ ,

$$\lambda \|\psi\|_{L^2(\pi)}^2 \geq \langle \psi_+, L\psi \rangle_{L^2(\pi)} = \mathcal{E}(\psi_+, \psi),$$

donc on conclut en combinant les inégalités.

3. On peut sans perdre de généralité que $\psi \geq 0$ partout (quitte à se restreindre à $S(\psi)$ au lieu de V). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum_{x \sim y} |\psi^2(x) - \psi^2(y)| &= \sum_{x \sim y} |\psi(x) - \psi(y)| |\psi(x) + \psi(y)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{x \sim y} (\psi(x) - \psi(y))^2} \sqrt{\sum_{x \sim y} (\psi(x) + \psi(y))^2} \\ &\leq \sqrt{2\mathcal{E}(\psi, \psi)} \sqrt{\sum_{x \sim y} (\psi(x) + \psi(y))^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{x \sim y} (\psi(x) + \psi(y))^2 \leq \sqrt{2} \sum_{x \sim y} (\psi^2(x) + \psi^2(y)),$$

donc

$$\sum_{x \sim y} |\psi^2(x) - \psi^2(y)| \leq 2\sqrt{2\mathcal{E}(\psi, \psi)} \|\psi\|_{L^2(\pi)}. \quad (1)$$

D'autre part, en posant pour tout $u \geq 0$ $S_u = \{x : \psi(x) > u\} \subset S(\psi)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \sim y} |\psi^2(x) - \psi^2(y)| &= 2 \sum_{\substack{x \sim y \\ x < y}} |\psi^2(x) - \psi^2(y)| \\ &= 4 \sum_{\substack{x \sim y \\ \psi(x) < \psi(y)}} \left(\int_{\psi(x)}^{\psi(y)} u du \right) \\ &= 4 \int_0^\infty u E(S_u, S_u^c) du. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que

$$E(S_u, S_u^c) = \sum_{\psi(x) \leq u < \psi(y)} \mathbf{1}_{x \sim y}.$$

Par hypothèse sur $h(\psi)$, il vient que

$$4 \int_0^\infty u E(S_u, S_u^c) du \geq 4h(\psi) \int_0^\infty u \pi(S_u) du = 2h(\psi) \|\psi\|_{L^2(\pi)}^2. \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient

$$8\mathcal{E}(\psi, \psi) \|\psi\|_{L^2(\pi)}^2 \geq 4h(\psi)^2 \|\psi\|_{L^2(\pi)}^4,$$

et le résultat en découle.

4. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient

$$\lambda \geq \frac{h(\psi)^2}{2},$$

pour tout $\lambda \geq 0$, et pour tout $\psi \in L^2(\pi)$ tel que $S(\psi) \neq \emptyset$, et $L\psi \leq \lambda\psi$ sur $S(\psi)$. On prend $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre non triviale de L , et ψ une fonction propre de L pour λ et normalisée telle que $\|\psi\|_{L^2(\pi)}^2 = 1$, et l'inégalité de Cheeger s'ensuit.